

Epreuve de mathématiques

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a prises.

Exercice 1

On note f la fonction définie, pour tout réel x distinct de -1 et 0 , par

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2(x+1)}$$

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que la fonction f s'écrive, pour tout réel x distinct de -1 et 0 , sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

2. Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$, $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$, $\int_1^2 \frac{1}{x+1} dx$ et en déduire $\int_1^2 f(x) dx$.

Exercice 2

Soient les nombres complexes $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Déterminer les modules et arguments de z_1 , z_2 , $z_1 \times z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, et z_1^9 .
2. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , on nomme O , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 . Le point I a pour affixe i .
- a) Montrer que, pour k appartenant à $\{0, 1, 2\}$, $|z_k - i| = 1$.
- b) En déduire que les points O , M_1 et M_2 appartiennent à un cercle dont on donnera le rayon et le centre.
3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes.

$$a) z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$b) z^2 + 7 = 0.$$

Exercice 3

Calculer

$$A = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x) dx$$

$$B = \int_3^4 \frac{1}{(x+3)^4} dx$$

$$C = \int_1^2 (2x+1)e^{-3x} dx \quad (\text{on pourra utiliser une IPP})$$

$$D = \int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln(x)} dx \quad (\text{changement de variable : } x = e^t)$$

Exercice 4

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) + y(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

1. Déterminer la solution générale de $(e) \quad y'(x) + y(x) = 0$ sur $]0; +\infty[$.
2. Vérifier que la fonction h , définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x}$ est une solution de l'équation (E) .
3. Ecrire la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale $f(\ln(2)) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(e^x - 1)}{e^x}$

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \ln(e^x - 1)$
 - a) Calculer la dérivée g' de g . Vérifier que g' peut s'écrire sous la forme $g'(x) = \frac{-e^{2x}}{(e^x - 1)^2}$. En déduire les variations de g .
 - b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.
 - c) On admettra que $g(1,5) = 0,040$ et que $g(1,6) = -0,122$. pourquoi peut-on alors affirmer qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$? En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
3. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$. En déduire les variations de f .
4. Dresser le tableau de variation de f .

Partie C

Soit α un nombre réel strictement supérieur à 2. On pose

$$I(\alpha) = \int_{\ln 2}^{\ln \alpha} f(t) dt.$$

1. Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{e^t - 1}$. En déduire une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{e^t - 1}$.
2. En utilisant le fait que f est solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) prouver que :

$$I(\alpha) = -f(\ln \alpha) + \ln(e^{\ln \alpha} - 1) - \ln \alpha + \ln 2.$$

3. En déduire que

$$I(\alpha) = -\frac{\ln(\alpha - 1)}{\alpha} + \ln\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) + \ln 2.$$

4. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 5

Partie A

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x^2 + 5x + 4$$

1. Déterminer la solution générale de $(e) \quad y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$
2. Trouver une solution particulière de (E) de la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c désignent des nombres réels.
3. Ecrire la solution générale de (E) .
4. Déterminer la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0; 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 0.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-x} + x^2 + x$$

et on appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. a) Calculer $f'(x)$.
b) Montrer que, pour $x > 0$ on a $1 - e^{-x} > 0$ et que, pour $x < 0$ on a $1 - e^{-x} < 0$.
c) En déduire le signe de $f'(x)$.
d) Donner le tableau de variation de la fonction f .
3. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = x^2 + x$$

On note (C') la courbe représentative de g dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique 2 cm). De l'étude du signe de $f(x) - g(x)$, déduire la position relative des courbes (C) et (C') .

4. Calculer l'aire, en cm^2 , du domaine délimité, sur la figure, par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 6

1. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et telle que $f(a + b - x) = f(x)$ pour tout x appartenant à $[a, b]$. Montrer que :

$$\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

2. Application : calculer $I = \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$

Exercice 7

Soit

$$P(x) = \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right). \quad |x| \neq 1.$$

1. Montrer que pour tout x réel tel que $|x| \neq 1$ et tout θ réel, $x^2 - 2x \cos(\theta) + 1 = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$, et que $P(x) > 0$.
2. Montrer que ,

$$P(x) = \frac{(x^{2n} - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

3. Exprimer $\ln P(x)$ pour $|x| > 1$ puis pour $|x| < 1$.
4. On rappelle (Sommes de Riemann)

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue} \quad \frac{b-a}{n} \sum_1^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Calculer alors

$$I(x) = \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta.$$